

جبري  
توزيع :  $R$  إذا كانت الشروط :  
نقول عن المجموعة  $A$  تحت  $R$  جبري فهو الحلقة التبادلية والواحدة

$$(1) A \text{ مودول } R$$

$$(2) \text{ توجد عملية داخلية على } A$$

$$[ , ] : A \times A \rightarrow A$$

$$(x, y) \rightarrow [x, y]$$

قاعدة السلسلة

$$(1) \forall x \in A \quad [x, x] = 0$$

$$(2) \forall x, y, z \in A : [x, y+z] = [x, y] + [x, z]$$

$$[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$(3) \forall \alpha \in R \quad \forall x, y \in A : \alpha [x, y] = [\alpha x, y] = [x, \alpha y]$$

$$(4) \forall x, y, z \in A : [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

توزيعية

لكل  $A$  جبري فهو الحلقة  $R$  عنده :

$$(1) \forall a \in A : [a, 0] = 0$$

$$(2) \forall a, b \in A : [a, b] = -[b, a]$$

$$(3) \forall a, b, c \in A : [a, [b, c]] = [b, [a, c]] + [c, [b, a]]$$

البرهان :

$$(1) \text{ لكون } a \in A \text{ عتبة}$$

$$[a, 0] = [a, 0+0] = [a, 0] + [a, 0]$$

نأخذ الطرفين

$$[a, 0] + [a, 0] = [a, 0] + [a, 0] + [a, 0]$$

$$0 = [a, 0]$$



محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$$\forall a, b \in A \quad [a+b, a+b] = [a+b, a] + [a+b, b] \quad (2)$$

$$0 = [a, \underset{=0}{a}] + [a, b] + [a, b] + [\underset{=0}{b}, b]$$

$$0 = [b, a] + [a, b]$$

ماجد زهير المزمع

~~$[b, a] = [a, b]$~~

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad (3)$$

$$[a, [b, c]] = -[b, [c, a]] - [c, [a, b]]$$

$$= -[b, [a, c]] - [c, [b, a]]$$

$$= [b, [a, c]] + [c, [b, a]]$$

تعارف :-

لكن  $A$  يبرهن صحة المقولة  $R$  يتقوى عن  $A$  تبين ان اذا حققت  $B$

$$\forall a, b \in A : [a, b] = 0$$

نقول من المبرر  $e \in A$  لأنه يربطه باليمين إذا كانت

$$\forall a \in A \quad [a, e] = a$$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

2. night

لأن  $A$  جبرتي فوق الحلقه  $R$  وإذا دمج  $A$  مع  $\{0\}$  (الجزء البسيط) عند  $0$

$$A = 0$$

C P L

بنظرهن؟  $c \in A$   $c$  خارج عن المصنف عند  $c$

لذا  $e = [e, e] = 0$  →  $e$  عنصر صفری

دسته  $a \in A$   $C$   $a^0$

$$a = [a, \underline{e}] = [a, \underline{0}] = 0$$

A=0 محده



# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

صراحة  
كل ما هو مكتوب هو مكتوب

البرهان :  
لكن  $A$  هي مجموعة الحلقة  $R$  ولنفرض ان  $A$  هي مجموعة  
 $\forall a, b, c \in A \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$   
ان  $A$  مجموعة مغلقة تحت الحلقة  $R$   
لنفرض ان  $A$  هي مجموعة مغلقة تحت الحلقة  $R$

$$[,] : A \times A \rightarrow A$$

$$(a, b) \rightarrow [a, b]$$

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

كيفية

$$1) \forall a \in A : [a, a] = a \cdot a - a \cdot a = 0$$

$$\begin{aligned} 2) \forall a, b, c \in A \quad [a+b, c] &= (a+b) \cdot c - c \cdot (a+b) \\ &= ac + bc - ca - cb \\ &= ac - ca + bc - cb \\ &= [a, c] + [b, c] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [a, b+c] &= a \cdot (b+c) - (b+c) \cdot a \\ &= ab + ac - ba - ca \\ &= (ab - ba) + (ac - ca) \\ &= [a, b] + [a, c] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \forall \alpha \in R \quad \forall a, b \in A : \alpha[a, b] &= \alpha(ab - ba) \\ &= \alpha(ab) - \alpha(ba) \\ &= (\alpha a)b - b(\alpha a) \\ &= [\alpha a, b] \end{aligned}$$

$$4) \forall a, b, c \in A : [a, [b, c]] = a[b, c] - [b, c]a$$



# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$$= a(bc - cb) - (bc - cb) \cdot a$$

$$= a \cancel{bc} - a \cancel{cb} - b \cancel{ca} + \boxed{cba}$$

$$\text{أي} [b, [c, a]] = b[ca] - [ca]b$$

$$= b(ca - ac) - (ca - ac)b$$

$$= b \cancel{ca} - b \cancel{ac} - \underline{cab} + a \cancel{cb}$$

بما أن

$$[c, [a, b]] = c(ab - ba) - (ab - ba)c$$

$$= \underline{cab} - \boxed{cba} - a \cancel{bc} + b \cancel{ac}$$

فبجمع الثلاثة السابقة نحصل على

$$[c, [b, a]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

وهذه هي علاقات جبر لي

تجسيدات الاشتقاق في جبر لي

الترتيب :

ليكن  $A$  جبر لي فوق الحقل  $R$  نحدد من الجبرية

$$d: A \rightarrow A$$

التي تلبي اشتراطات

$$(1) \forall x, y \in A \quad d(x+y) = d(x) + d(y)$$

$$(2) \forall \alpha \in R \quad \forall x \in A \quad d(\alpha x) = \alpha d(x)$$

$$(3) \forall x, y \in A \quad d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$$

يتبع مباشرة من الترتيب أن  $d$  من  $A$  إلى  $A$  (الخطية والخطية)

$d$  هو تجسيد اشتقاق في  $A$  - نعرف لمجموعة تجسيدات الاشتقاق في  $A$  بالرمز

$$Der(A)$$

ملاحظة :

ليكن  $A$  جبر لي فوق الحقل التبادلية والواحدة  $R$  فإن مجموعة تجسيدات الاشتقاق

$Der(A)$  تشكل مجموعة فرعية من  $R$  بالبنية المعطاة للحركة



# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$$\forall d_1, d_2 \in \text{Der}(A); (d_1 + d_2)(a) = d_1(a) + d_2(a) \quad \forall a \in A$$

$$\forall \alpha \in R \quad \forall d \in \text{Der}(A); (\alpha d)(x) = \alpha d(x) \quad \forall x \in A$$

البرهان:

$$\forall d_1, d_2 \in \text{Der}(A)$$

ونريد أن نثبت أن  $d_1 + d_2 \in \text{Der}(A)$  وذلك بإثبات أن  $d_1 + d_2$  يحقق الشرط الأول والثاني اللذين في تعريف الاشتقاق. ونثبت أن  $d_1 + d_2$  يحقق الشرط الأول:

$$\forall a, b \in A; (d_1 + d_2)([a, b]) = d_1([a, b]) + d_2([a, b])$$

$$= [d_1(a), b] + [a, d_1(b)] + [d_2(a), b] + [a, d_2(b)]$$

$$= [d_1(a) + d_2(a), b] + [a, d_1(b) + d_2(b)]$$

$$= [(d_1 + d_2)(a), b] + [a, (d_1 + d_2)(b)]$$

دعنا نثبت أن  $d_1 + d_2$  يحقق الشرط الثاني:

لنكن  $d \in \text{Der}(A)$ ,  $\alpha \in R$ . نريد أن نثبت أن  $\alpha d$  يحقق الشرطين (1) و (2) اللذين في تعريف الاشتقاق. ونثبت أن  $\alpha d$  يحقق الشرط (1):

$$\forall x, y \in A; (\alpha d)([x, y]) = \alpha d([x, y])$$

$$= \alpha ([d(x), y] + [x, d(y)])$$

$$= \alpha [d(x), y] + \alpha [x, d(y)]$$

$$= [\alpha d(x), y] + [x, \alpha d(y)]$$

$$= [(\alpha d)(x), y] + [x, (\alpha d)(y)]$$

ومن ثمة نثبت أن  $\alpha d \in \text{Der}(A)$ .

على سبيل ختام نثبت أن  $\text{Der}(A)$  تشكل زمرة تحت الجمع  $R$ .